Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 33

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

10 de septiembre de 2019

1. Deducir la ecuación de Klein-Gordon

Dado el Lagrangiano

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2}\phi^2 \tag{1}$$

Primero aclarar que este Lagrangiano no es el que da Javier en el capítulo 33, la razón de que use este en lugar del que da Javier es por razones de dimensiones, pues la derivada ∂ tiene dimensiones de $[L^1]$, mientras que m tiene dimensiones de masa, por lo que para poder sumar las dos partes debo multiplicar por alguna constante que unifique las dimensiones, en este caso he decidido usar la constante $\frac{c}{\hbar}$ que tiene unidades de

$$\left[\frac{LT^{-1}}{ML^2T^{-1}}\right] = [M^{-1}L^{-1}]$$

Por lo que ahora ambos términos tienen unidades de inverso de longitud al cuadrado.
Usemos ahora la ecuación de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{2}$$

Empecemos con la parte fácil, la segunda;

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2c^2}{2\hbar^2}\phi^2\right) = -\frac{m^2c^2}{2\hbar^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\phi^2\right) = -\frac{m^2c^2}{2\hbar^2}(2\phi) = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi \tag{3}$$

Ahora vamos a por la primera, que es más difícil, vemos que tenemos que derivar respecto de $\partial_\mu \phi$, eso solo aparece en el término[1]

$$\frac{1}{2}\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi$$

por lo que

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left(\frac{1}{2}\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\partial_\nu \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial^\nu \phi + \frac{1}{2}\partial_\nu \phi \frac{\partial\left(\partial^\nu \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \partial^\nu \phi + \frac{1}{2}\partial_\nu \phi \frac{\partial\left(\partial^\nu \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \tag{4}$$

Es fácil argumentar que

$$\frac{\partial\left(\partial_\nu \phi\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \delta^\mu_\nu$$

pues si $\mu = \nu$ la derivada de algo respeto a sí mismo es 1, mientras que si $\mu \neq \nu$, recordemos que el Lagrangiano depende de cinco variables:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\phi, \partial_0 \phi, \partial_1 \phi, \partial_2 \phi, \partial_3 \phi\right)$$

[1] Cambio el índice para porqué en la ecuación de E-L ya está μ en uso.

por lo que entonces la derivada parcial de una con respeto a las otras tiene que ser cero (es la misma razón que he usado para ignorar el primer término del Lagrangiano en la derivada respeto de ϕ e ignorar el segundo término en esta derivada).
Aún nos queda por calcular, pero, la derivada

$$\frac{\partial\left(\partial^{\nu}\phi\right)}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}$$

para calcularla tenemos que usar la derivada que acabamos de calcular y recordar que $\partial^{\nu}=g^{\nu\lambda}\partial_{\lambda}$, por lo que

$$\frac{\partial\left(\partial^{\nu}\phi\right)}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}=g^{\nu\lambda}\frac{\partial\left(\partial_{\lambda}\phi\right)}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}=g^{\nu\lambda}\delta^{\mu}_{\lambda}=g^{\nu\mu} \tag{5}$$

Introduciendo todo eso en la ecuación (4) obtenemos

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}=\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\partial^{\nu}\phi+\frac{1}{2}\partial_{\nu}\phi g^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi=\partial^{\mu}\phi \tag{6}$$

Sustituyendo finalmente en (2)

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi-\left(-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\right)=\left[\partial_{\mu}\partial^{\mu}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\phi=0 \tag{7}$$

Obteniendo así la ecuación de Klein-Gordon.

2. Calcular ω' y k'

Sea $\phi(x)$ para un observador inercial

$$\phi(x)=e^{i(\omega t-kx)} \tag{8}$$

Y sea otro observador inercial que se mueve con velocidad $v=\frac{kc^2}{\omega}$ respecto al primero, calcula cuanto valdrán las constantes ω' y k'.
Empecemos considerando una transformación de Lorentz, sabemos que, en (1+1) dimensiones esta viene dada por la matriz (usamos la inversa, pues queremos calcular x en función de x'):

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{pmatrix} \tag{9}$$

Esto quiere decir que, dado que x^{μ} es un vector contravariante

$$x=\begin{pmatrix}ct\\ x\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & \beta\\ \beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct'\\ x'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}ct'+\beta x'\\ x'+\beta ct'\end{pmatrix} \tag{10}$$

Sustituyendo esto en el campo obtenemos, sabiendo que ϕ es un campo escalar,

$$\phi'(x')=\phi(x)=e^{i(\omega t-kx)}=e^{i\left[\gamma\omega\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)-\gamma k\left(x'+\beta ct'\right)\right]}=e^{i\left[(\gamma\omega-\gamma k\beta c)t'-\left(\gamma k-\gamma\omega\frac{\beta}{c}\right)x'\right]} \tag{11}$$

Por lo que vemos que

$$\begin{pmatrix}\omega'\\ k'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}\omega-k\beta c\\ k-\omega\frac{\beta}{c}\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & -\beta c\\ -\beta c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ k\end{pmatrix} \tag{12}$$

Vemos que la matriz que transforma ω y k es sospechosamente similar a Λ, de hecho es fácil ver que si consideramos ck obtenemos lo siguiente

$$\begin{pmatrix}\omega'\\ ck'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & -\beta\\ -\beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ ck\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}\omega\\ ck\end{pmatrix} \tag{13}$$

Por lo que ω y ck transforman como un cuadrivector. De hecho, multiplicando este cuadrivector por $\hbar$ hemos demostrado que

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega \\ ck \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ cp \end{pmatrix} \tag{14}$$

es también un cuadrivector.
Hasta ahora hemos considerado una transformación de Lorentz con velocidad β arbitraria, si imponemos ahora que $\beta = \frac{kc}{\omega}$ nos queda

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ ck' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{kc}{\omega} \\ -\frac{kc}{\omega} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ ck \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \omega - \frac{k^2c^2}{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Por lo que la velocidad de grupo

$$v'_g = \frac{k'c^2}{\omega'} = 0$$